Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 20** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 25/05, 16h30

Aula 20 ①/4

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 66,67,71,72,73 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 20 a 22 **EDOs homogéneas**

Definição: Uma função $f(x,y)$ diz-se homogénea de grau zero se

$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)}$, $\forall (x,y) \in D_f$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $(\lambda x, \lambda y) \in D_f$

Exercício 1: Verifique se as seguintes funções são homogéneas de grau zero:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+3y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + 2x$

Definição: Uma EDO $y' = f(x,y)$ diz-se homogénea se f é homogénea de grau zero.

Notas:

- Para resolver EDOs homogéneas usa-se a mudança de variável $\boxed{y = zx}$ (onde z depende de x)
- Tem-se que $y' = (zx)' = z'x + z\overset{=1}{x'} \Leftrightarrow \boxed{y' = z'x + z}$
- Usando esta mudança de variável, a EDO original transforma-se numa EDO de variáveis separáveis, que se resolve como na aula 19.
- Para obter o integral geral da EDO original, aplica-se a mudança de variável inversa $\boxed{z = \dfrac{y}{x}}$.

Exercício 2: Verifique que as seguintes EDOs são homogéneas e determine o seu integral geral.

a) $x e^{y/x} y' = y e^{y/x} + x$

b) $(x^3 + y^3)\,dx - y^2 x\,dy = 0$

⇝ EDOs redutíveis a EDOs homogéneas

Nota: Esta matéria não está nos slides. Ver na observação 4.4. da pág. 67 dos apontamentos um caso mais geral do que o apresentado nesta planificação.

Definição: Uma EDO redutível a EDO homogénea é uma EDO da forma

$$\boxed{y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}}, \text{ onde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \boxed{a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0}$$

Estas EDOs convertem-se em EDOs homogéneas efetuando as mudanças de variáveis

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = w + \beta \end{cases}$$

, onde α e β são constantes a determinar por forma a que se verifique o sistema

$$\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Depois resolve-se a EDO homogénea obtida pelo processo dado antes.

Exercício 3: Determine o integral geral da EDO $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$.

Exercício 4: Resolver o exercício 5 do 2.º teste de 19/06/2019

Nota: Os exercícios 3 e 4 serão resolvidos na OT a seguir à aula.

Slides 16 a 18 — **EDOs lineares de 1.ª ordem**

Definição: Uma EDO linear de 1.ª ordem é uma equação do tipo

$$\boxed{a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)}$$

onde a_1, a_0, b são funções definidas num intervalo I com $a_1(x) \neq 0, \forall x \in I$. Dividindo por $a_1(x)$, a EDO anterior é equivalente a

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$$

com $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $q(x) = \dfrac{b(x)}{a_1(x)}$.

Notas:
- $b(x) \neq 0$ (ou $q(x) \neq 0$) ⇝ EDO linear completa
- $b(x) = 0$ (ou $q(x) = 0$) ⇝ EDO linear homogénea

Atenção: Não confundir EDO linear homogénea com EDO homogénea

Exemplos: 1) $\ln(x)\, y' + e^{x} y = 3 \rightsquigarrow$ EDO linear completa

2) $2x' + y^5 x = 0 \rightsquigarrow$ EDO linear homogénea (na variável x)

3) $y y' + 3y = \cos x \rightsquigarrow$ não é EDO linear pois o coeficiente de y' depende de y

4) $y' + x e^{y} = \operatorname{sen} x \rightsquigarrow$ não é EDO linear por ter e^{y}

Procedimento para resolver EDOs lineares de 1.ª ordem

1.º Passo: Escrever a EDO na forma $y' + p(x) y = q(x)$

2.º Passo: Determinar o fator integrante: $\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}}$

3.º Passo: Multiplicar a EDO por $\mu(x)$ e simplificar

$$y' + p(x) y = q(x) \quad \big) \times \mu(x)$$

$$\mu(x) y' + \mu(x) p(x) y = \mu(x) q(x)$$

$$\Updownarrow \circledast$$

$$(\mu(x) y)' = \mu(x) q(x)$$

4.º Passo: Integrar a eq. obtida em ordem a x

$$(\mu(x) y)' = \mu(x) q(x) \quad \big) \text{ integrando}$$

$$\mu(x) y = \int \mu(x) q(x)\,dx \iff \boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) q(x)\,dx}$$

$\circledast$ Justificação desta passagem

$$(\mu(x) y)' = \mu'(x) y + \mu(x) y' \overset{\text{c. aux}}{=} \mu(x) p(x) y + \mu(x) y'$$

c. aux. $\mu'(x) = \left(e^{\int p(x)\,dx}\right)' = \underbrace{\left(\int p(x)\,dx\right)'}_{p(x)} \underbrace{e^{\int p(x)\,dx}}_{\mu(x)} = p(x) \times \mu(x) = \mu(x) \times p(x)$

Exercício 5: Resolver as seguintes EDOs:

a) $xy' - y = x - 1$, $x > 0$

b) $y' + \left(2 + \frac{1}{x}\right) y = x e^{-2x}$, $x > 0$

$\boxed{\text{Slide 19}}$ **Existência e unicidade do PVI linear**

Teorema: Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o PVI

$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exercício 6: Resolver o PVI $\begin{cases} y' + y = \dfrac{x \cos x}{e^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

TPCs: Folha prática 4: 8, 9, 10, 14, 15

2.º teste, 19/06/2019 → Ex. 2b)

2.º teste, 13/06/2018 → Ex. 5a)

Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 6b)

Aula 20

1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+3y^2}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2+3(\lambda y)^2}=\frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2x^2+3\lambda^2y^2}=\frac{\cancel{\lambda^2}xy}{\cancel{\lambda^2}(x^2+3y^2)}=\frac{xy}{x^2+3y^2}=f(x,y)$$

Logo f é homogénea de grau zero

b) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+2x$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x}{\lambda y}+2\lambda x=\frac{x}{y}+2\lambda x\neq f(x,y)$$

Por isso f não é homogénea de grau zero

2)

a) $xe^{y/x}y'=ye^{y/x}+x \rightsquigarrow$ EDO homogénea (Provar e resolver)

1° Passo: Escrever a EDO na forma $y'=f(x,y)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{ye^{y/x}+x}{xe^{y/x}}\Leftrightarrow y'=\frac{ye^{y/x}}{xe^{y/x}}+\frac{x}{xe^{y/x}}\Leftrightarrow y'=\underbrace{\frac{y}{x}+\frac{1}{e^{y/x}}}_{f(x,y)}$$

2° Passo: Verificar que f é homogénea de grau zero:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\cancel{\lambda}y}{\cancel{\lambda}x}+\frac{1}{e^{\cancel{\lambda}y/\cancel{\lambda}x}}=\frac{y}{x}+\frac{1}{e^{y/x}}=f(x,y)\ \checkmark$$

Nota: Se no enunciado já disser que a EDO é homogénea, não é preciso fazer este 2° passo.

3° Passo: Efetuar a mudança de variável $\boxed{y=zx}\rightsquigarrow\boxed{y'=z'x+z}$ e simplificar

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{e^{y/x}}\xrightarrow[y'=z'x+z]{y=zx} z'x+z=\frac{zx}{x}+\frac{1}{e^{zx/x}}\Leftrightarrow z'x+z=z+\frac{1}{e^z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z'x=\frac{1}{e^z}}$$ EDO de variáveis separáveis

4° Passo: Determinar o integral geral da EDO de variáveis separáveis obtida:

Passo 4.1: $z'x=\dfrac{1}{e^z}\Leftrightarrow\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1}{e^z}\Leftrightarrow e^z x\,dz=dx\Leftrightarrow\boxed{e^z dz=\frac{1}{x}dx}$

Passo 4.2: $\displaystyle\int e^z dz=\int\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow e^z=\ln|x|+c,\ c\in\mathbb{R}$

5º Passo: Obter o integral geral da EDO original aplicando a mudança de variável inversa

$y = zx \rightsquigarrow \boxed{z = \frac{y}{x}}$

$\Leftrightarrow e^{y/x} = \ln|x| + C, \; C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln(\ln|x| + C), \; C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = x \ln(\ln|x| + C), \; C \in \mathbb{R}$

2 b) $(x^3+y^3)dx - y^2x\,dy = 0$

1º Passo: $\Leftrightarrow -y^2x\,dy = -(x^3+y^3)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{y^2x} \Leftrightarrow y' = \frac{x^3+y^3}{y^2x}$ $f(x,y)$

2º Passo: T.P.C.

3º Passo: $y = zx$ e $y' = z'x + z$

$y' = \frac{x^3+y^3}{y^2x} \rightsquigarrow z'x + z = \frac{x^3+(zx)^3}{(zx)^2x} \Leftrightarrow z'x + z = \frac{x^3+z^3x^3}{z^2x^2x} \Leftrightarrow z'x + z = \frac{\cancel{x^3}(1+z^3)}{z^2\cancel{x^3}}$

$\Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^3}{z^2} - \frac{z}{1} {}_{(\times z^2)} \Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^3-z^3}{z^2} \Leftrightarrow z'x = \frac{1}{z^2}$

4º Passo:

4.1) $\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} \times x = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z^2 dz = \frac{1}{x}dx$

4.2) $\int z^2 dz = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{z^3}{3} = \ln|x| + C, \; C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^3 = 3\ln|x| + 3C, \; C \in \mathbb{R}$

$\to K, \; K \in \mathbb{R}$

5º Passo: $\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3\ln|x| + K, \; K \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \sqrt[3]{3\ln|x| + K}, \; K \in \mathbb{R}$

$\to z = \frac{y}{x}$

$\Leftrightarrow y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + K}, \; K \in \mathbb{R}$

5) a) $xy' - y = x - 1, \; x > 0 \rightsquigarrow$ EDO linear de 1ª ordem

1º Passo: Escrever a EDO na forma $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ e identificar $p(x)$ e $q(x)$

$\frac{\cancel{x}y'}{\cancel{x}} - \frac{y}{x} = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{x-1}{x}$ $\qquad p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = \frac{x-1}{x}$

2º Passo: Determinar o fator integrante $\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)dx}}$

c. aux. $\int p(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln(x)$ (não colocar $+C$)

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln(x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\boxed{\mu(x) = \frac{1}{x}}$

3º Passo: Multiplicar a EDO por $\mu(x)$ e simplificar:

ver planificação

$y' + p(x)y = q(x) \rightsquigarrow \mu(x)(y' + p(x)y) = \mu(x)q(x) \Leftrightarrow \boxed{(\mu(x)\,y)' = \mu(x) \times q(x)}$

$y' - \frac{1}{x}y = \frac{x-1}{x} \xrightarrow{\times\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{x}\left(y' - \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{x-1}{x^2}$

$\times\mu(x)$

Integrar em ordem a x

4º Passo: Integrar a eq. obtida em ordem a $x \rightsquigarrow \mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx}$

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{x-1}{x^2}\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{x}y = \int \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x}\,dx - \boxed{\int x^{-2}\,dx} \longrightarrow \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}y = \ln x + \frac{1}{x} + c,\ c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y = x\left(\ln x + \frac{1}{x} + c\right),\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = x\ln x + 1 + cx,\ c\in\mathbb{R}$$

b) $y' + \left(2+\frac{1}{x}\right)y = xe^{-2x}, \quad x>0$

1º Passo: $p(x) = 2+\frac{1}{x}$ e $q(x) = xe^{-2x}$

2º Passo: C. aux. $\int p(x)\,dx = \int\left(2+\frac{1}{x}\right)dx = \int 2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = 2x + \ln x$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{2x+\ln x} = e^{2x}\times \cancel{e^{\ln x}} = xe^{2x} \qquad \boxed{\mu(x) = e^{2x}\times x}$$

3º Passo: Completar em T.P.C.

4º Passo: $y = \frac{1}{\mu(x)} \times \int \mu(x)\times q(x)\,dx$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{2x}\times x}\times \int \cancel{e^{2x}}\times x \times x\cancel{e^{-2x}}\,dx$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{2x}\times x}\times \int x^2\,dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{2x}\times x}\times\left(\frac{x^3}{3}+c\right),\ c\in\mathbb{R}$$

6) $\begin{cases} y' + y = \dfrac{x\cos x}{e^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1º Passo: $p(x) = 1$ e $q(x) = \frac{x\cos x}{e^x}$

2º Passo: C. aux. $\int p(x)\,dx = \int 1\,dx = x \rightsquigarrow \mu = e^{\int p(x)dx} = e^x \qquad \boxed{\mu(x) = e^x}$

3º Passo: $y' + y = \frac{x\cos x}{e^x} \xrightarrow{\times(e^x)} e^x(y'+y) = \cancel{e^x}\times\frac{x\cos x}{\cancel{e^x}} \Leftrightarrow (e^x y)' = x\cos x$

4º Passo: $e^x y = \int x\cos x\,dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^x}\underbrace{\int x\cos x\,dx}_{\text{Primitivação por Partes}}$

$v = x \longrightarrow v' = 1$

$u' = \cos x \longrightarrow u = \operatorname{sen} x$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^x}\left(\operatorname{sen} x\times x - \int \operatorname{sen} x\times 1\,dx\right. \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^x}\left(\operatorname{sen} x\times x + \cos x + c\right),\ c\in\mathbb{R}$$

5º Passo: Usar a condição extra para determinar o valor de c

$$\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{y(0)} = \underset{\substack{\downarrow\\ y}}{1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\underbrace{e^0}_{=1}}\left(\overbrace{\operatorname{sen} 0\times 0}^{=0}\times 0 + \overbrace{\cos 0}^{=1} + c\right) \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$$

Então: $\boxed{y = \frac{1}{e^x}\left(\operatorname{sen} x\times x + \cos x\right)}$